Derivazione di funzioni trigonometriche

Lucia de Biase

16 ottobre 2004

1 Derivata del seno

Per definizione, la derivata nel punto x_0 di una qualsiasi funzione f derivabile in x_0 vale:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Si consideri ora in particolare la funzione:

$$f(x) = \sin x \tag{2}$$

Tale funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in tutto il suo insieme di definizione. Vogliamo calcolarne la derivata in un qualsiasi punto x. Quindi avremo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \tag{3}$$

Ora sfruttiamo la formula di addizione del seno:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \tag{4}$$

Quindi, in particolare, per il nostro caso varrà:

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x \tag{5}$$

Se ora sostituiamo questa relazione nell'uguaglianza (3) otteniamo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \tag{6}$$

Ora, al tendere di h a zero, il $\cos h$ tenderà all'unità. Avremo dunque:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x + \sin h \cos x - \sin x}{h} \tag{7}$$

Potremo dunque elidere i due termini uguali e opposti $\sin x$ e $-\sin x$. Possiamo scrivere:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h \cos x}{h} \tag{8}$$

Ma il limite è uguale al prodotto dei limiti quindi, se vale la (8) varrà anche:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \lim_{h\to 0} \cos x \tag{9}$$

Ma il termine $\cos x$ non dipende da h quindi:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cos x \tag{10}$$

Sfruttando ora un limite notevole potremo scrivere:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \tag{11}$$

Dunque, sostituendo la (11) nella (10) otteniamo:

$$f'(x) = \cos x \tag{12}$$

2 Derivata del coseno

Si consideri ora la funzione:

$$f(x) = \cos x \tag{13}$$

Tale funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in tutto il suo insieme di definizione. Vogliamo calcolarne la derivata in un qualsiasi punto x. Quindi avremo:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \tag{14}$$

Ora sfruttiamo la formula di addizione del coseno:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin \tag{15}$$

Quindi, in particolare, per il nostro caso varrà:

$$\cos(x+h) = \cos x\cos h - \sin h\sin x \tag{16}$$

Se ora sostituiamo questa relazione nell'uguaglianza (14) otteniamo:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x\cos h - \sin h\sin x - \cos x}{h} \tag{17}$$

Ora, al tendere di h a zero, il $\cos h$ tenderà all'unità. Avremo dunque:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x - \sin h\sin x - \cos x}{h} \tag{18}$$

Potremo dunque elidere i due termini uguali e opposti $\cos x$ e $-\cos x$. Possiamo scrivere:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin h\sin x}{h} \tag{19}$$

Ma il limite è uguale al prodotto dei limiti quindi, se vale la (19) varrà anche:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} (- \lim_{h \to 0} \sin x) \tag{20}$$

Ma il termine $\sin x$ non dipende da h quindi:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} (- \sin x) \tag{21}$$

Sfruttando ora un limite notevole potremo scrivere:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \tag{22}$$

Dunque, sostituendo la (22) nella (21) otteniamo:

$$f'(x) = - \sin x \tag{23}$$